

Μαθηματικά Γ Λυκείου Θετικής Κατεύθυνσης
Διαγώνισμα στους Μιγαδικούς Αριθμούς

15-10-2005

Θέμα 1^ο:

A. α. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \in \mathbb{R}$, τότε να γράψετε τον μιγαδικό $\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}$ με τη μορφή $x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 1

β. Να αποδείξετε ότι: $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$

Μονάδες 2

γ. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1) $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \dots\dots\dots$

2) $\overline{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n} = \dots$

3) $\overline{Z_1 \cdot Z_2 \cdot \dots \cdot Z_n} = \dots\dots\dots$

4) $\overline{n \cdot Z} = \dots\dots\dots \quad n \in \mathbb{N}$

5) $(\overline{Z})^n = \dots\dots\dots \quad n \in \mathbb{N}$

Μονάδες 5

B. α. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $|Z_1 + Z_2|$ και $|Z_1| + |Z_2|$

Μονάδες 3

β. Αν M_1, M_2 οι εικόνες των Z_1, Z_2 στο μιγαδικό επίπεδο, τότε με τι ισούται το μέτρο της διαφοράς $Z_1 - Z_2$; Η απάντηση να δικαιολογηθεί.

Μονάδες 3

γ. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την εικόνα του Z_1 και ακτίνα α .

Μονάδες 3

Γ. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο αριθμός $3i^7 - 27i^2 + (1 - \lambda)i + 5$ είναι: α. πραγματικός β. φανταστικός

Μονάδες 8

Θέμα 2^ο:

A. Να δείξετε ότι αν ο $w = \frac{(8 - iz)i}{z + 6}$ είναι φανταστικός αριθμός, τότε οι εικόνες του μιγαδικού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 13

B. Αν $|z| = 2005$ να δείξετε ότι $|2z - 2005^2| = 2005|z - 2|$

Μονάδες 12

Θέμα 3ο:

A. Έστω z, w μιγαδικοί. Να δείξετε ότι: $(1 + zw)(1 + \overline{z\overline{w}}) \leq (1 + z\overline{z})(1 + w\overline{w})$

Μονάδες 13

B. Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

$$(4 + 3i)(z - 3)^{2005} = (-3 + 4i)(z + 3)^{2005} \text{ να δειχτεί ότι } |z - 3| = |z + 3| \text{ και } z \in \mathbb{I}$$

Μονάδες 12

Θέμα 4ο:

A. Αν $z = x + yi$, $x > 0$ να δειχτεί ότι: $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| < 1$

Μονάδες 12

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{(3 + 4i)\overline{z} + 4 - 8i}{5}$

1. Αν A είναι η εικόνα του μιγαδικού $\alpha = 1 + 2i$, να βρεθεί η εικόνα A' του μιγαδικού $f(\alpha)$.

2. Να δειχτεί ότι το σύνολο των σημείων $M(z)$ για τα οποία ισχύει $f(z) = z$ είναι η μεσοκάθετος του ευθ. τμήματος AA' .

Μονάδες 13



Καλή επιτυχία
Γ. Καριπίδης, Μαθηματικός